

Capítulo 2

Aplicaciones Afines

2.1. Aplicaciones afines y representación matricial

Una vez hemos definido los espacios con los que vamos a trabajar, junto con sus elementos (puntos) y las formas de referirnos a ellos (coordenadas), sus subespacios y las formas de determinarlos (ecuaciones), el siguiente paso es definir las aplicaciones entre espacios que conservan la geometría a estudiar, las denominadas aplicaciones afines.

2.1.1. Definición y propiedades de las aplicaciones afines

Definición 2.1.1. Sean A y A' espacios afines. Una aplicación $f : A \rightarrow A'$ es una *aplicación afín* si preserva las combinaciones afines, es decir,

$$f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(P_i) \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^r \lambda_i = 1.$$

Como consecuencia inmediata de la definición de aplicación afín tenemos que las aplicaciones afines conservan el baricentro.

Corolario 2.1.2. Sean $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ y sea $f : A \rightarrow A'$ una aplicación afín. Si $B \in A$ es el baricentro de $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$, entonces $f(B)$ es el baricentro de $f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_r)$.

Demostración. Por definición de baricentro (c.f. Lema 1.2.22), las coordenadas baricéntricas de B respecto de P_0, P_1, \dots, P_r son todas $\lambda_i = \frac{1}{r+1}$, $i = 0, 1, \dots, r$, por lo que B se puede expresar como la combinación afín

$$B = \sum_{i=0}^r \frac{1}{r+1} P_i.$$

Entonces

$$f(B) = \sum_{i=0}^r \frac{1}{r+1} f(P_i)$$

y, por tanto, $f(B)$ es el baricentro de los puntos imagen. \square

Proposición 2.1.3. *Sean A y A' espacios afines con direcciones V y V' . La definición de aplicación afín $f : A \rightarrow A'$ en términos de combinaciones afines es equivalente a cada una de las siguientes condiciones:*

1. Para todo $P \in A$ la aplicación

$$\vec{f} : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V' \\ \overrightarrow{PQ} & \longmapsto & \overrightarrow{f(P)f(Q)} \end{array}$$

es lineal.

2. Existe $P \in A$ tal que la aplicación

$$\vec{f} : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V' \\ \overrightarrow{PQ} & \longmapsto & \overrightarrow{f(P)f(Q)} \end{array}$$

es lineal.

Demostración. ■ Primero probaremos que si f es una aplicación afín, entonces se verifica 1. Sea $P \in A$, y probemos que \vec{f} es lineal. Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Sean $Q_1, Q_2 \in A$ tales que $\vec{v}_1 = \overrightarrow{PQ_1}$ y $\vec{v}_2 = \overrightarrow{PQ_2}$. El punto

$$R := P + \lambda_1 \overrightarrow{PQ_1} + \lambda_2 \overrightarrow{PQ_2}$$

se puede expresar como combinación afín tal que

$$R = \lambda_0 P + \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$$

con $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$. Como f preserva las combinaciones afines, se tiene que

$$f(R) = \lambda_0 f(P) + \lambda_1 f(Q_1) + \lambda_2 f(Q_2) = f(P) + \lambda_1 \overrightarrow{f(P)f(Q_1)} + \lambda_2 \overrightarrow{f(P)f(Q_2)}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \vec{f}(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) &= \vec{f}(\lambda_1 \overrightarrow{PQ_1} + \lambda_2 \overrightarrow{PQ_2}) = \vec{f}(\overrightarrow{PR}) = \overrightarrow{f(P)f(R)} = \\ &\lambda_1 \overrightarrow{f(P)f(Q_1)} + \lambda_2 \overrightarrow{f(P)f(Q_2)} = \lambda_1 \vec{f}(\overrightarrow{PQ_1}) + \lambda_2 \vec{f}(\overrightarrow{PQ_2}) = \lambda_1 \vec{f}(\vec{v}_1) + \lambda_2 \vec{f}(\vec{v}_2) \end{aligned}$$

y \vec{f} es lineal.

■ 1. implica 2. es inmediato.

- Probaremos que si se verifica 2., entonces f es una aplicación afín. Sean puntos $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ y escalares $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, tales que $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$. Observamos que $\sum_{i=0}^r \lambda_i P_i = P_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i}$ y, entonces,

$$\overrightarrow{P_0 \sum_{i=0}^r \lambda_i P_i} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i}.$$

Combinando esto con las propiedades de puntos y vectores con la linealidad de \overrightarrow{f} se tiene

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i P_i\right) &= f(P_0) + \overrightarrow{f(P_0)} \overrightarrow{f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i P_i\right)} = f(P_0) + \overrightarrow{f(P_0)} \overrightarrow{f\left(P_0 \sum_{i=0}^r \lambda_i P_i\right)} = \\ &= f(P_0) + \overrightarrow{f(P_0)} \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i}\right) = f(P_0) + \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{f(P_0)} \left(\overrightarrow{P_0 P_i}\right) = \\ &= f(P_0) + \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{f(P_0) f(P_i)} = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(P_i). \end{aligned}$$

luego f conserva las combinaciones afines y, por tanto, es una aplicación afín. \square

Observación 2.1.4. La aplicación lineal \overrightarrow{f} se denomina *aplicación lineal asociada a f* y no depende del punto P . Se cumple que, para cualesquiera $Q, R \in A$, $\vec{v} \in V$,

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{QR}) = \overrightarrow{f(Q) f(R)}$$

y

$$f(Q + \vec{v}) = f(Q) + \overrightarrow{f}(\vec{v}).$$

En efecto, si llamamos $S := Q + \vec{v}$, entonces $\overrightarrow{f}(\vec{v}) = \overrightarrow{f(QS)} = \overrightarrow{f(Q) f(S)}$, por lo que

$$f(Q + \vec{v}) = f(S) = f(Q) + \overrightarrow{f(Q) f(S)} = f(Q) + \overrightarrow{f}(\vec{v}).$$

Ejemplo 2.1.5. Sea $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, tal que

$$f(x, y, z) = (3x - y + 2z - 1, 2x + z + 2).$$

Sea la aplicación lineal \overrightarrow{f} ,

$$\overrightarrow{f}(x, y, z) = (3x - y + 2z, 2x + z).$$

El punto $\bar{0} := (0, 0, 0) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ tiene por imagen $f(\bar{0}) = (-1, 2) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$. Sea otro $P \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, con coordenadas $P = (x, y, z)$, con lo que $\overrightarrow{0P} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Por tanto,

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{0P}) = f(P) - f(\bar{0}) = \overrightarrow{f(\bar{0}) f(P)}$$

y f es afín con aplicación lineal asociada \overrightarrow{f} .

La siguiente proposición recoge las propiedades más importantes de las aplicaciones afines.

Proposición 2.1.6. 1. Sean $f : A \rightarrow A'$, $g : A' \rightarrow A''$ aplicaciones afines con aplicaciones lineales asociadas \vec{f} y \vec{g} . La composición $g \circ f$ es una aplicación afín, con aplicación lineal asociada $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.

2. Una aplicación afín $f : A \rightarrow A'$ es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva) si y solo si su aplicación lineal asociada \vec{f} es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva)

3. Dadas $f_i : A \rightarrow A'$ aplicaciones afines y escalares λ_i con $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$. La combinación afín

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i f_i$$

es una aplicación afín con aplicación lineal asociada dada por la correspondiente combinación afín de aplicaciones lineales, $\sum_{i=0}^r \lambda_i \vec{f}_i$.

Demostración. 1. Si tanto f como g preservan las combinaciones afines, su composición $g \circ f$ también, por lo tanto es afín. Además,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(g \circ f)}(\overrightarrow{PQ}) &= \overrightarrow{(g \circ f)}(P)(g \circ f)(Q) = \overrightarrow{g(f(P))g(f(Q))} = \\ &= \vec{g}(\overrightarrow{f(P)f(Q)}) = \vec{g}(\vec{f}(\overrightarrow{PQ})) = (\vec{g} \circ \vec{f})(\overrightarrow{PQ}). \end{aligned}$$

2. Dados $P, Q \in A$ se tiene que $f(P) = f(Q)$ si y solo si $\mathbf{0} = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \vec{f}(\overrightarrow{PQ})$, lo que garantiza la equivalencia entre la inyectividad de f y \vec{f} .

Si f es sobreyectiva y tomamos $P', Q' \in A'$ con $\vec{v} = \overrightarrow{P'Q'}$, sean $P, Q \in A$ con $f(P) = P'$ y $f(Q) = Q'$, y tenemos que

$$\vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{P'Q'}.$$

Si \vec{f} es sobreyectiva y tomamos $P' \in A'$ y un punto $O \in A$, el vector $\overrightarrow{f(O)P'}$ tiene una preimagen \vec{v} tal que $\vec{f}(\vec{v}) = \overrightarrow{f(O)P'}$. Entonces el punto $P := O + \vec{v}$ verifica

$$f(P) = f(O + \vec{v}) = f(O) + \vec{f}(\vec{v}) = f(O) + \overrightarrow{f(O)P'} = P'.$$

La equivalencia para f y \vec{f} biyectivas es consecuencia de las dos anteriores.

3. Usaremos la Proposición 2.1.6 para probar que la aplicación $\vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$ es lineal e igual a la combinación afín de aplicaciones lineales. En efecto, dados $P, Q \in A$,

$$\vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{\sum_{i=0}^r \lambda_i f_i(P) \sum_{i=0}^r \lambda_i f_i(Q)}$$

Reorganizando los puntos, la expresión es igual a

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i \overrightarrow{f_i(P)f_i(Q)} = \sum_{i=0}^r \lambda_i \overrightarrow{f_i(PQ)},$$

que es una aplicación lineal que coincide con la combinación afín indicada. \square

Una propiedad deseable para aplicaciones entre espacios en matemáticas es que conserve la estructura de subespacio. Esto es lo que prueba la siguiente proposición.

Proposición 2.1.7. *Sea $f : A \rightarrow A'$ una aplicación afín y $B \subset A$ un subespacio afín tal que $B = P + W$, con $P \in B$ y $W \subset V$. Entonces se verifica que*

$$f(B) = f(P) + \overrightarrow{f}(W)$$

y, por tanto, $f(B)$ es subespacio afín de A' con dirección $\overrightarrow{f}(W)$.

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} f(B) &= \{f(Q) : Q \in B\} = \{f(P + \vec{w}) : \vec{w} \in W\} = \{f(P) + \overrightarrow{f}(\vec{w}) : \vec{w} \in W\} = \\ &= f(P) + \{\overrightarrow{f}(\vec{w}) : \vec{w} \in W\} = f(P) + \overrightarrow{f}(W). \end{aligned}$$

\square

Definición 2.1.8. Una aplicación afín biyectiva entre dos espacios afines A y A' denomina *isomorfismo afín*. En caso de que $A = A'$ diremos que f es una *afinidad*.

Observación 2.1.9. Se puede demostrar que si f es una afinidad, su inversa $f^{-1} : A \rightarrow A$ es también una afinidad. Usando las propiedades de la Proposición 2.1.6 podemos concluir que las afinidades forman un grupo con la operación de la composición, que se denota por $GA(n, \mathbb{K})$. Este grupo es isomorfo al producto semidirecto $\mathbb{K} \ltimes GL(n, \mathbb{K}) \subset GL(n+1, \mathbb{K})$.

Una aplicación lineal sobre un espacio vectorial de dimensión n queda completamente determinada especificando las imágenes de los n vectores de cualquiera de sus bases, ya que el resto de los vectores quedan prescritos mediante las combinaciones lineales que son preservadas por una aplicación lineal. Siguiendo el paralelismo, una aplicación afín sobre un espacio afín de dimensión n quedará determinada por completo especificando la imagen de los $n+1$ puntos de una referencia afín.

Teorema 2.1.10. *Sea A un espacio afín de dimensión n y sea $\mathcal{R}_a = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ una referencia afín de A . Si A' es otro espacio afín y $Q_0, Q_1, \dots, Q_n \in A'$ existe una única aplicación afín $f : A \rightarrow A'$ tal que $f(P_i) = Q_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Además*

- Si los puntos Q_i son afínmente independientes entonces f es inyectiva.

- Si los puntos Q_i son afínmente generadores de A' entonces f es sobreyectiva.
- Si los puntos Q_i son una referencia afín de A' entonces f es biyectiva y, por tanto, un isomorfismo afín.

Demostración. Como \mathcal{R}_a es referencia afín de A , cualquier punto $P \in A$ se puede escribir de forma única como combinación afín de los puntos P_i , es decir, $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i$. Definimos la imagen de P por f como

$$f(P) := \sum_{i=0}^n \lambda_i Q_i$$

y obtenemos directamente que f es afín, ya que conserva las combinaciones afines:

$$f(P) = f\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i Q_i = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(P_i)$$

y además $f(P_i) = Q_i$. Cualquier otra aplicación afín $g : A \rightarrow A'$ que lleve $g(P_i) = Q_i$, necesariamente conservará las combinaciones afines $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i$, por lo que

$$g(P) = g\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i g(P_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i Q_i = f(P),$$

por tanto $g = f$ y obtenemos la unicidad.

- Supongamos que los puntos Q_i son afínmente independientes y sean los puntos $R_1 = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i$ y $R_2 = \sum_{i=0}^n \mu_i P_i \in A$ tales que $f(R_1) = f(R_2)$. Entonces

$$f\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i\right) = f\left(\sum_{i=0}^n \mu_i P_i\right) \text{ lo que equivale a } \sum_{i=0}^n \lambda_i Q_i = \sum_{i=0}^n \mu_i Q_i.$$

Los puntos Q_i son afínmente independientes, luego forman una referencia afín del subespacio afín $V(\{Q_0, \dots, Q_n\}) \subset A'$ y, puesto que las coordenadas baricéntricas de $f(R_1) = f(R_2)$ respecto de esta referencia afín son únicas se tiene que $\lambda_i = \mu_i$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$. Entonces $R_1 = R_2$ lo que garantiza la inyectividad de f .

- Si los puntos Q_i son afínmente generadores de A' y $R \in A'$ se tiene que $R = \sum_{i=0}^n \lambda_i Q_i$, una combinación afín que expresa R en función de los Q_i . Definiendo $P := \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i$ la definición de aplicación afín garantiza que

$$f(P) = f\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(P_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i Q_i = R,$$

luego f es sobreyectiva.

- Como una referencia afín es un conjunto de puntos afínmente independientes y generadores, si los Q_i son referencia afín de A' la aplicación f es inyectiva y sobreyectiva, por tanto biyectiva.

□

El Teorema 2.1.10 nos permite estudiar qué tipo de transformaciones afines podemos tener en casos sencillos, como por ejemplo el plano afín.

Sean $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ afínmente independientes y sean $Q_0, Q_1, Q_2 \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$. Especificando que cada P_i se transforma por f en $f(P_i) = Q_i$ tenemos definida una única aplicación afín de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ en $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$. Si los puntos Q_0, Q_1, Q_2 son afínmente independientes (i.e. son otra referencia afín de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$), entonces f es biyectiva y, por tanto, una afinidad. Si los puntos Q_i son afínmente dependientes, entonces bien están alineados (en cuyo caso la imagen de f es la recta en $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ que los contiene), o son los tres iguales (en cuyo caso la imagen de f es el punto $Q_0 = Q_1 = Q_2$).

Obsérvese que la imagen de un cuarto punto $P_3 \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ queda totalmente especificada por f , ya que podemos escribir P_3 como combinación afín única de los P_0, P_1, P_2 . Dicho de otro modo, la libertad para escoger una aplicación afín de un espacio afín de dimensión n abarca solo $n + 1$ elecciones, quedando el resto prescritas. Véase la analogía con las aplicaciones lineales, donde la libertad para determinar una aplicación lineal de un espacio vectorial de dimensión n reside en elegir las imágenes de n vectores de una base, más la regla de que el cero vaya al cero, como en cualquier aplicación lineal, lo cual suman $n + 1$ prescripciones también.

2.1.2. Representación matricial de aplicaciones afines

Una vez introducidas las aplicaciones afines, el siguiente paso es dar una expresión matricial que permita calcular de una forma sencilla y efectiva las imágenes de puntos y subespacios.

Representación en coordenadas cartesianas

Sean A, A' espacios afines de dimensiones n y m respectivamente. Sea $f : A \rightarrow A'$ una aplicación afín con aplicación lineal asociada $\vec{f} : V \rightarrow V'$ y $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$, $\mathcal{R}'_c = \{O'; \mathcal{B}'\}$ referencias cartesianas de A y A' respectivamente. Sea $P \in A$, con coordenadas cartesianas $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ respecto de \mathcal{R}_c , y supongamos que $f(P) \in A'$ tiene coordenadas cartesianas $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ respecto de \mathcal{R}'_c . La relación entre \mathbf{x} e \mathbf{y} viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{y}^t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \mathbf{b}^t & M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\vec{f}) \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ son las coordenadas cartesianas de $f(O)$ respecto de la referencia \mathcal{R}'_c y $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\vec{f})$ es la matriz de la aplicación lineal asociada \vec{f} respecto de las bases \mathcal{B} y \mathcal{B}' .

La matriz que relaciona ambos vectores es la matriz de f respecto a las referencias cartesianas $\mathcal{R}_c, \mathcal{R}'_c$,

$$M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \mathbf{b}^t & M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\vec{f}) \end{array} \right)$$

de tal modo que podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{y}^t \end{pmatrix} = M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} \quad \circ \quad \mathbf{y}^t = \mathbf{b}^t + M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\vec{f}) \cdot \mathbf{x}^t.$$

Demostración. Sea $P \in A$. Las coordenadas cartesianas de $f(P)$ con respecto a \mathcal{R}'_c son las coordenadas del vector $\overrightarrow{O'f(P)}$ con respecto a la base \mathcal{B}' de V' . Las propiedades de \vec{f} garantizan que

$$\overrightarrow{O'f(P)} = \overrightarrow{O'f(O)} + \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{O'f(O)} + \vec{f}(\overrightarrow{OP})$$

que en coordenadas cartesianas respecto a \mathcal{R}'_c

$$\mathbf{y}^t = \mathbf{b}^t + M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\vec{f}) \cdot \mathbf{x}^t.$$

La unicidad se sigue de la unicidad de las coordenadas \mathbf{b}^t y de la matriz $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\vec{f})$. \square

Sean $\mathcal{R}_{c,1}$ y $\mathcal{R}_{c,2}$ dos referencias cartesianas de A y supongamos que \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son las coordenadas cartesianas de un punto $P \in A$ respecto de $\mathcal{R}_{c,1}$ y $\mathcal{R}_{c,2}$. Del mismo modo sean $\mathcal{R}'_{c,1}$ y $\mathcal{R}'_{c,2}$ dos referencias cartesianas de A' y supongamos que \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 son las coordenadas cartesianas de $f(P) \in A'$ respecto de $\mathcal{R}'_{c,1}$ y $\mathcal{R}'_{c,2}$. Usando las relaciones de cambio de coordenadas cartesianas de la Proposición 1.2.6, tenemos

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{R}'_{c,1}\mathcal{R}'_{c,2}} \cdot M_{\mathcal{R}_{c,1}\mathcal{R}'_{c,1}}(f) \cdot C_{\mathcal{R}_{c,2}\mathcal{R}_{c,1}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}_2^t \end{pmatrix} &= C_{\mathcal{R}'_{c,1}\mathcal{R}'_{c,2}} \cdot M_{\mathcal{R}_{c,1}\mathcal{R}_{c,1}}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}_1^t \end{pmatrix} = \\ C_{\mathcal{R}'_{c,1}\mathcal{R}'_{c,2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{y}_1^t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{y}_2^t \end{pmatrix} = M_{\mathcal{R}_{c,2}\mathcal{R}'_{c,2}}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}_2^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por lo que la relación entre las matrices de f respecto de las distintas referencias viene dada por las matrices de cambio de referencia cartesiana:

$$C_{\mathcal{R}'_{c,1}\mathcal{R}'_{c,2}} \cdot M_{\mathcal{R}_{c,1}\mathcal{R}'_{c,1}}(f) \cdot C_{\mathcal{R}_{c,2}\mathcal{R}_{c,1}} = M_{\mathcal{R}_{c,2}\mathcal{R}'_{c,2}}(f).$$

Obsérvese la analogía con la expresión que relaciona dos matrices de la misma aplicación lineal entre espacios vectoriales, respecto de diferentes bases.

Siguiendo con la analogía, dadas aplicaciones afines $f : A \rightarrow A'$ y $g : A' \rightarrow A''$, y referencias cartesianas \mathcal{R}'_c , \mathcal{R}'_c y \mathcal{R}'_c , respectivamente, es un ejercicio sencillo con las matrices ver que

$$M_{\mathcal{R}_c, \mathcal{R}'_c}(g \circ f) = M_{\mathcal{R}'_c, \mathcal{R}'_c}(g) \cdot M_{\mathcal{R}_c, \mathcal{R}'_c}(f),$$

es decir, la matriz de la composición es el producto de matrices de cada aplicación.

Representación en coordenadas baricéntricas

Sea $f : A \rightarrow A'$ una aplicación afín. Consideremos las referencias afines $\mathcal{R}_a = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, $\mathcal{R}'_a = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_m\}$ de A y A' respectivamente. Sea $P \in A$ cuyas coordenadas baricéntricas respecto de \mathcal{R}_a son $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$, $\sum_{j=0}^n \lambda_j = 1$ y supongamos que $f(P) \in A'$ tiene coordenadas baricéntricas $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \dots, \mu_m)$, $\sum_{i=0}^m \mu_i = 1$ respecto de \mathcal{R}'_a . De forma similar a como establecimos el cambio de coordenadas baricéntricas en la Sección 1.2.3, cada $f(P_j)$ se expresa en términos de la referencia \mathcal{R}'_a como

$$f(P_j) = \sum_{i=0}^m \alpha_{ij} Q_i,$$

con $\sum_{i=0}^m \alpha_{ij} = 1$, $j = 0, 1, \dots, n$. Entonces, se tiene que

$$\sum_{i=0}^m \mu_i Q_i = f(P) = f\left(\sum_{j=0}^n \lambda_j P_j\right) = \sum_{j=0}^n \lambda_j f(P_j) = \sum_{j=0}^n \lambda_j \left(\sum_{i=0}^m \alpha_{ij} Q_i\right) = \sum_{i=0}^m \left(\sum_{j=0}^n \alpha_{ij} \lambda_j\right) Q_i$$

por lo que la relación entre $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ viene dada por

$$\boldsymbol{\mu}^t = \left(\alpha_{ij}\right)_{(m+1) \times (n+1)} \cdot \boldsymbol{\lambda}^t$$

Denotaremos por

$$M_{\mathcal{R}_a, \mathcal{R}'_a}(f) = \left(\alpha_{ij}\right)_{(m+1) \times (n+1)}$$

la matriz de f respecto de las referencias afines indicadas, cuyas columnas vienen dadas por las coordenadas baricéntricas de $f(P_j)$ respecto de \mathcal{R}'_a .

De forma análoga al caso cartesiano, la relación entre las matrices de una aplicación afín respecto de diferentes referencias afines $\mathcal{R}_{a,1}$, $\mathcal{R}_{a,2}$ en A y $\mathcal{R}'_{a,1}$, $\mathcal{R}'_{a,2}$ en A' , viene dada por

$$C_{\mathcal{R}'_{a,1}, \mathcal{R}'_{a,2}} \cdot M_{\mathcal{R}_{a,1}, \mathcal{R}'_{a,1}}(f) \cdot C_{\mathcal{R}_{a,2}, \mathcal{R}_{a,1}} = M_{\mathcal{R}_{a,2}, \mathcal{R}'_{a,2}}(f).$$

Así como la matriz de la composición de dos aplicaciones afines $f : A \rightarrow A'$ y $g : A' \rightarrow A''$, respecto de referencias afines \mathcal{R}'_a , \mathcal{R}'_a y \mathcal{R}'_a , es igual al producto de las matrices correspondientes

$$M_{\mathcal{R}_a, \mathcal{R}''_a}(g \circ f) = M_{\mathcal{R}'_a, \mathcal{R}''_a}(g) \cdot M_{\mathcal{R}_a, \mathcal{R}'_a}(f).$$

Siguiendo el paralelismo con los cambios de coordenadas al final de la Sección 1.2, el siguiente diagrama y las posteriores expresiones relacionan las matrices de una aplicación afín respecto de referencias cartesianas y baricéntricas:

	A	\xrightarrow{f}	A'	
	P	\mapsto	$f(P)$	
	\mathcal{R}_c	\longrightarrow	\mathcal{R}'_c	
	\mathbf{x}	$(1 \mid \mathbf{y})^t = M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f) \cdot (1 \mid \mathbf{x})^t$	\mathbf{y}	
$\boldsymbol{\lambda}^t = M_n \cdot (1 \mid \mathbf{x})^t$	\updownarrow		\updownarrow	$\boldsymbol{\mu}^t = M_m \cdot (1 \mid \mathbf{y})^t$
	\mathcal{R}_a	\longrightarrow	\mathcal{R}'_a	
	$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{\mu}^t = M_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}(f) \cdot \boldsymbol{\lambda}^t$	$\boldsymbol{\mu}$	

$$M_m \cdot M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f) \cdot (1 \mid \mathbf{x})^t = M_m \cdot (1 \mid \mathbf{y})^t = \boldsymbol{\mu}^t = M_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}(f) \cdot \boldsymbol{\lambda}^t = M_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}(f) \cdot M_n \cdot (1 \mid \mathbf{x})^t .$$

Por tanto

$$M_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}(f) = M_m \cdot M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f) \cdot M_n^{-1}$$

y

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f) = M_m^{-1} \cdot M_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}(f) \cdot M_n .$$

Ejemplo 2.1.11. Sean en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ los puntos

$$P_0 = (1, 0, 1), P_1 = (0, 0, 1), P_2 = (2, 1, 0), P_3 = (1, 0, 2)$$

y los puntos

$$Q_0 = (0, 1, 0), Q_1 = (0, 1, 1), Q_2 = (2, 1, -1), Q_3 = (-1, 1, 0).$$

Los puntos P_0, P_1, P_2, P_3 forman una referencia afín de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, ya que

$$\{\vec{v}_1 := \overrightarrow{P_0 P_1} = (-1, 0, 0), \vec{v}_2 := \overrightarrow{P_0 P_2} = (1, 1, -1), \vec{v}_3 := \overrightarrow{P_0 P_3} = (0, 0, 1)\}$$

es una base de \mathbb{R}^3 . Consideremos la referencia afín

$$\mathcal{R}_a = \{P_0 = (1, 0, 1), P_1 = (0, 0, 1), P_2 = (2, 1, 0), P_3 = (1, 0, 2)\}$$

y su referencia cartesiana asociada

$$\mathcal{R}_c = \{P_0 = (1, 0, 1); \vec{v}_1 = (-1, 0, 0), \vec{v}_2 = (1, 1, -1), \vec{v}_3 = (0, 0, 1)\}.$$

Por el Teorema 2.1.10, existe una única aplicación afín $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ tal que $f(P_i) = Q_i, i = 0, 1, 2, 3$. Sin embargo, los puntos Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 no forman una referencia afín de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, ya que

$$\{\vec{v}'_1 := \overrightarrow{Q_0 Q_1} = (0, 0, 1), \vec{v}'_2 := \overrightarrow{Q_0 Q_2} = (2, 0, -1), \vec{v}'_3 := \overrightarrow{Q_0 Q_3} = (-1, 0, 0)\}$$

no es una base de \mathbb{R}^3 , sino que son generadores del plano vectorial $\{y = 0\}$. Escogemos $Q'_3 = (0, 2, 0)$. Se puede comprobar que

$$\mathcal{R}'_a = \{Q_0 = (0, 1, 0), Q_1 = (0, 1, 1), Q_2 = (2, 1, -1), Q'_3 = (0, 2, 0)\}$$

es una referencia afín con referencia cartesiana asociada

$$\mathcal{R}'_c = \{Q_0 = (0, 1, 0); \vec{v}'_1 = (0, 0, 1), \vec{v}'_2 = (2, 0, -1), \vec{w}' := \overrightarrow{Q_0 Q'_3} = (0, 1, 0)\}.$$

Para poder representar matricialmente la aplicación afín f respecto a las referencias afines \mathcal{R}_a y \mathcal{R}'_a , nos falta conocer las coordenadas de $f(P_3) = Q_3$ respecto de \mathcal{R}'_a . Expresamos Q_3 como combinación afín de los puntos de \mathcal{R}'_a :

$$(-1, 1, 0) = \lambda_0(0, 1, 0) + \lambda_1(0, 1, 1) + \lambda_2(2, 1, -1) + \lambda_3(0, 2, 0), \quad \text{con } \sum_{i=0}^3 \lambda_i = 1,$$

lo que da lugar al sistema

$$\begin{cases} -1 & = & & \lambda_2 \\ 1 & = & \lambda_0 & +\lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 \\ 0 & = & & \lambda_1 & -\lambda_2 \\ 1 & = & \lambda_0 & +\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 \end{cases}$$

con solución $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2, -1/2, -1/2, 0)$, que son las coordenadas baricéntricas de Q_3 respecto de \mathcal{R}'_a . Por tanto,

$$M_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde en cada columna aparecen las coordenadas baricéntricas de Q_0, Q_1, Q_2 y Q_3 en la referencia afín \mathcal{R}'_a . Obsérvese que el rango de la matriz es 3, luego el rango de f que coincide con la dimensión de su imagen es 2, lo que concuerda con el hecho de que los puntos Q_0, Q_1, Q_2 y Q_3 , generan un plano en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$.

Para obtener la expresión de f respecto de las referencias cartesianas asociadas a las referencias afines usamos

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f) = M_3^{-1} \cdot M_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}(f) \cdot M_3 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Para poder entender el comportamiento de f , vamos a transformar su matriz en la matriz respecto de la referencia cartesiana estándar en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{R}_e \mathcal{R}_e}(f) &= C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_e} \cdot M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f) \cdot C_{\mathcal{R}_e \mathcal{R}_c} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observamos que $M_{\mathcal{R}_e \mathcal{R}_e}(f)$, obviamente, es una matriz del mismo rango que $M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f)$.

Con esta representación obtenemos que la imagen por f del origen $\vec{0} = (0, 0, 0)$ es el punto $(1, 1, 1)$ y que la aplicación vectorial asociada viene dada por

$$\vec{f}(x, y, z) = (y - z, 0, -x)$$

con lo cual

$$f(x, y, z) = (y - z + 1, 1, -x + 1).$$

Es sencillo ver que

$$\ker(\vec{f}) = \begin{cases} y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

de dimensión 1.

Usando esta representación también podemos calcular imágenes de subespacios. Sea L la recta que pasa por el punto $R = (0, 0, 1)$ de dirección $\vec{u} = (1, 1, 0)$, es decir

$$L = R + \mathcal{L}\{\vec{u}\} = (0, 0, 1) + \mathcal{L}\{(1, 1, 0)\}.$$

Su imagen viene dada por

$$f(L) = f(R) + \vec{f}(L[\vec{u}]) = f(R) + \mathcal{L}\{\vec{f}(\vec{u})\}.$$

Para calcular $f(R)$ hacemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y para calcular $\vec{f}(\vec{u})$ hacemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$f(L) = (0, 1, 1) + \mathcal{L}\{(1, 0, -1)\}.$$

Por otra parte, si queremos calcular la imagen de la recta M , definida por las ecuaciones implícitas

$$M : \begin{cases} x & = & -1 \\ y - z & = & 2 \end{cases}$$

observamos que la dirección de M es la del núcleo de \vec{f} , por lo tanto esperamos que la imagen de M por la aplicación afín f sea de dimensión 0, luego un punto. Podemos escribir $M = (-1, 2, 0) + \mathcal{L}\{(0, 1, 1)\}$, y comprobamos que

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y para calcular $\vec{f}(\vec{u})$ hacemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$f(M) = (3, 1, 2) + \mathcal{L}\{(0, 0, 0)\},$$

luego $f(M)$ es el punto $(3, 1, 2)$. Se puede comprobar como, escogiendo cualquier otro punto de M , la imagen por f es el mismo punto $(3, 1, 2)$.

2.1.3. Puntos fijos y subespacios invariantes

En el estudio de las aplicaciones afines de un espacio afín en sí mismo, juega un papel esencial el cálculo de los puntos fijos y de los subespacios invariantes igual que los vectores propios (que dan lugar a direcciones y subespacios lineales invariantes) en los endomorfismos lineales.

Definición 2.1.12. El conjunto de *puntos fijos* de una aplicación afín $f : A \rightarrow A$ es

$$\text{Fix}(f) = \{P \in A : f(P) = P\}.$$

Si $\text{Fix}(f)$ es no vacío, es un subespacio afín de dirección

$$\overline{\text{Fix}(f)} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_V)$$

Supongamos que existe $P \in \text{Fix}(f)$. Para todo $Q \in \text{Fix}(f)$ se verifica

$$Q = P + \overrightarrow{PQ} = f(P + \overrightarrow{PQ}) = f(P) + \vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = P + \vec{f}(\overrightarrow{PQ}).$$

Entonces se tiene que $\overrightarrow{PQ} = \vec{f}(\overrightarrow{PQ})$, y el vector \overrightarrow{PQ} es un punto fijo de la aplicación lineal asociada \vec{f} , por lo tanto

$$\overrightarrow{PQ} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_V).$$

Dada una referencia cartesiana \mathcal{R}_c de A , el conjunto de puntos fijos (en coordenadas cartesianas respecto de esa referencia) se puede calcular resolviendo el sistema

$$\left(M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) - I_{n+1} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.1)$$

Definición 2.1.13. Un subespacio afín $B \subset A$ es *invariante* por una aplicación afín $f : A \rightarrow A$ si $f(B) \subset B$.

Observación 2.1.14. En particular, el conjunto de puntos fijos de f , si es no vacío, es un subespacio invariante.

La siguiente proposición caracteriza los subespacios invariantes de un espacio afín.

Proposición 2.1.15. *Un subespacio afín $B = P + W$ es invariante para f si y solo si W es invariante para \vec{f} y $\overrightarrow{Pf(P)} \in W$.*

Demostración. Si B es invariante entonces $f(P) \in B$. Como consecuencia el vector $\overrightarrow{Pf(P)}$ une dos puntos de B y, por tanto, $\overrightarrow{Pf(P)} \in W$. Por otro lado, como $f(B) = f(P) + \vec{f}(W) \subset B$, la dirección de $f(B)$, que es $\vec{f}(W)$, verifica que $\vec{f}(W) \subset W$, por lo que W es invariante para \vec{f} .

Recíprocamente, sea $Q = P + \overrightarrow{PQ} \in B$. Entonces

$$f(Q) = f(P) + \vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = P + \overrightarrow{Pf(P)} + \vec{f}(\overrightarrow{PQ}) \in B,$$

y B es invariante. □

En particular, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.16. *Una recta afín $L = P + \mathcal{L}\{\vec{v}\}$ es invariante si y solo si $\mathcal{L}\{\vec{v}\}$ es invariante por \vec{f} (que equivale a que \vec{v} sea vector propio de \vec{f}) y $\overrightarrow{Pf(P)} \in \mathcal{L}\{\vec{v}\}$, es decir $\overrightarrow{Pf(P)}$ es múltiplo de \vec{v} .*

Proposición 2.1.17. *Sea \mathcal{R}_c una referencia cartesiana de un espacio afín A y sea $f : A \rightarrow A$ una aplicación afín, con matriz respecto de dicha referencia $M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f)$. Los hiperplanos invariantes de A vienen dados por la ecuación*

$$\left(M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f)^t - \lambda \cdot I_{n+1} \right) \cdot \mathbf{b}^t = \mathbf{0},$$

donde las soluciones $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ representan la ecuación de un hiperplano

$$b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = 0,$$

en coordenadas cartesianas respecto de \mathcal{R}_c .

Demostración. En coordenadas cartesianas respecto de \mathcal{R}_c , un hiperplano H de ecuación

$$\mathbf{b} \cdot (1 \mid \mathbf{x})^t = 0$$

es invariante por f si, para cada $P \in H$, con coordenadas \mathbf{x} , se cumple

$$\mathbf{b} \cdot M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) \cdot (1 \mid \mathbf{x})^t = 0.$$

Como todas las ecuaciones de H son múltiplos unas de otras y la expresión anterior (si no es nula) define una ecuación de H , entonces

$$\mathbf{b} \cdot M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) = \lambda \cdot \mathbf{b}$$

lo que, trasponiendo, nos da la expresión del enunciado. \square

Los dos resultados anteriores permiten calcular todos los subespacios afines invariantes en aplicaciones afines de espacios A con dimensión menor o igual que tres. En efecto, los posibles subespacios invariantes serán puntos (fijos), rectas o planos (hiperplanos).

Ejemplo 2.1.18. Sea $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ la aplicación afín

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 1, x_2 - x_3 + 1, x_1 - x_3)$$

cuya matriz respecto de la referencia cartesiana canónica viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Para calcular sus puntos fijos resolvemos el sistema

$$\left(M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) - I_4 \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

que viene a ser

$$\text{Fix}(f) : \begin{cases} 1 & & +x_3 & = & 0 \\ 1 & -x_1 & & = & 0 \\ & & -x_2 & -2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

cuya única solución es $\text{Fix}(f) = \{(1, 2, -1)\}$.

Para calcular los hiperplanos invariantes $b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ resolvemos el sistema

$$\left(M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f)^t - \lambda \cdot I_4 \right) \cdot \mathbf{b}^t = \mathbf{0}$$

que equivale a

$$\begin{cases} (1 - \lambda)b_0 & +b_1 & +b_2 & & = & 0 \\ & (1 - \lambda)b_1 & -b_2 & & = & 0 \\ & & (1 - \lambda)b_2 & -b_3 & = & 0 \\ & b_1 & & +(-1 - \lambda)b_3 & = & 0 \end{cases}$$

Los valores λ son valores propios de la matriz $M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f)^t$, cuyo polinomio característico es

$$P(\lambda) = \lambda(1 - \lambda)(-\lambda^2 + \lambda + 1) = -\lambda(1 - \lambda)\left(\lambda - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Sustituyendo por $\lambda = 1$ en el sistema no existen soluciones de hiperplanos no triviales. Si sustituimos por $\lambda = 0$ encontramos el hiperplano invariante

$$\{x_1 + x_2 + x_3 = 2\}.$$

Para las otras dos raíces del polinomio característico obtenemos los hiperplanos

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}x_1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x_2 + x_3 = \frac{4}{1 - \sqrt{5}}$$

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2}x_1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x_2 + x_3 = \frac{4}{1 + \sqrt{5}}.$$

2.2. Algunas aplicaciones afines

Dar una clasificación exhaustiva de todas las aplicaciones afines de un espacio afín A en sí mismo es complicado. En esta sección vamos a estudiar distintos tipos particulares de aplicaciones afines, determinando sus puntos fijos y sus subespacios invariantes. En toda la sección, A será un espacio afín de dimensión n y dirección V , y las aplicaciones $f : A \rightarrow A$ serán afines.

2.2.1. Traslaciones

Dado $\vec{v} \in V$, definimos la *traslación* de vector \vec{v} , denotada por τ como

$$\begin{aligned} \tau : A &\longrightarrow A \\ P &\longmapsto P + \vec{v} \end{aligned}$$

Se trata de una aplicación afín ya que, dados $P, Q \in A$,

$$\vec{\tau}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\tau(P)\tau(Q)} = \overrightarrow{(P + \vec{v})(Q + \vec{v})} = \overrightarrow{PQ}$$

por lo que su aplicación lineal asociada es la identidad, $\vec{\tau} = \text{Id}_V$. Sea $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ una referencia cartesiana de A . Como $\tau(O) = O + \vec{v}$, las coordenadas cartesianas $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ de $\tau(O)$ respecto de \mathcal{R}_c son las coordenadas de \vec{v} respecto de la base \mathcal{B} . Por tanto, la matriz de τ respecto a la referencia cartesiana \mathcal{R}_c es

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\tau) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \mathbf{a}^t & I_n \end{array} \right)$$

La inversa de una traslación de vector \vec{v} es la traslación de vector $-\vec{v}$, que tiene como matriz asociada respecto a \mathcal{R}_c

$$M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}_c}(\tau) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -\mathbf{a}^t & I_n \end{array} \right).$$

Si $\vec{v} \neq \mathbf{0}$, una traslación τ no tiene puntos fijos. Los subespacios invariantes serán de la forma $B = P + W$ con $W \subset V$ invariante (lo que se cumple siempre ya que $\vec{\tau} = \text{Id}_V$) y tales que $\overrightarrow{P\tau(P)} \in W$, lo que equivale a $\vec{v} \in W$. Por tanto B es un subespacio afín invariante de una traslación si el vector de traslación \vec{v} está contenido en su dirección W .

Una propiedad importante de las traslaciones es que llevan rectas en rectas paralelas a ellas y, por tanto, conservan el paralelismo entre subespacios de A . En efecto, si $L = P + \mathcal{L}\{\vec{w}\}$, su imagen trasladada es

$$\tau(P + L[\vec{w}]) = \tau(P) + \vec{\tau}(L[\vec{w}]) = P + \vec{v} + L[\vec{w}]$$

que es la recta paralela a L por el punto $Q := P + \vec{v}$.

Observación 2.2.1. Si consideramos un espacio vectorial V sobre \mathbb{K} con su estructura de espacio afín estándar $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ podemos entender una aplicación afín $f : \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ como la composición de una aplicación lineal y una traslación de vector $\vec{v} := f(\bar{0})$,

$$f = \tau \circ \vec{f}.$$

En efecto, dado $P \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$,

$$f(P) = f(\bar{0}) + \vec{f}(\overrightarrow{\bar{0}P}) = f(\bar{0}) + \vec{f}(P - \mathbf{0}) = \vec{v} + \vec{f}(P)$$

interpretando al final P como vector de V .

Si $f(\bar{0}) = \bar{0}$, entonces $f = \vec{f}$ y podemos interpretar una aplicación lineal como una aplicación afín que lleva el origen en el origen.

Ejemplo 2.2.2. En $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, consideramos la traslación $\tau : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ de vector $\vec{v} = (3, 1)$. Como vemos en la Figura 2.2.2, la imagen por τ del punto $P = (2, 3)$ es $Q := P + \vec{v}$. Los subespacios invariantes por τ son aquellos cuya dirección contiene al vector \vec{v} como, por ejemplo, la recta $L := \{x - 3y = 3\}$, cuya dirección es la recta vectorial $\{x - 3y = 0\} + \mathcal{L}[\vec{v}]$. Respecto de la referencia cartesiana estándar, la matriz de τ viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_{c,e}\mathcal{R}_{c,e}}(\tau) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

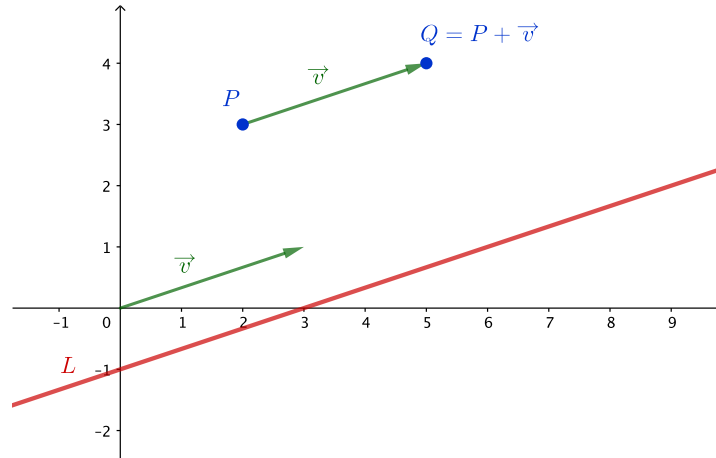


Figura 2.1: Traslación en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ de vector $\vec{v} = (3, 1)$ y recta $L : \{x - 3y = 3\}$ invariante.

2.2.2. Homotecias

Dado un punto $C \in B$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, tal que $\lambda \neq 0, 1$, definimos la *homotecia* de centro C y razón λ como la aplicación

$$\begin{aligned} \eta : A &\longrightarrow A \\ P &\longmapsto C + \lambda \overrightarrow{CP} \end{aligned}$$

Se trata de una aplicación afín ya que, dados $P, Q \in A$,

$$\overrightarrow{\eta(P)\eta(Q)} = \overrightarrow{\eta(P)\eta(Q)} = \overrightarrow{(C + \lambda \overrightarrow{CP})(C + \lambda \overrightarrow{CQ})} = \lambda \overrightarrow{PQ}$$

por lo que su aplicación lineal asociada es $\vec{\eta} = \lambda \text{Id}_V$. Respecto de la referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$, como

$$\eta(O) = C + \lambda \overrightarrow{CO} = O + \overrightarrow{OC} + \lambda \overrightarrow{CO} = O + (1 - \lambda) \overrightarrow{OC},$$

las coordenadas cartesianas de $f(O)$ respecto a \mathcal{R}_c son $(1 - \lambda)\mathbf{a}$, donde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ son las coordenadas del centro C . La matriz de η respecto a la referencia cartesiana \mathcal{R}_c es

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\eta) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline (1 - \lambda)\mathbf{a}^t & \lambda I_n \end{array} \right)$$

La inversa de una homotecia de centro C y razón λ es la homotecia de centro C y razón λ^{-1} con matriz, respecto a \mathcal{R}_c ,

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\eta) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline (1 - \lambda^{-1})\mathbf{a}^t & \lambda^{-1} I_n \end{array} \right).$$

Es sencillo comprobar que el producto de ambas matrices es la identidad, por lo que las aplicaciones son una inversa de la otra.

Observación 2.2.3. La razón por la cual excluimos los valores 0 y 1 es porque, para $\lambda = 0$ obtenemos la aplicación constante que lleva cualquier punto a C . Para $\lambda = 1$ la aplicación es la identidad en el espacio afín A . Si $\lambda = -1$ obtenemos un caso especial de homotecia que es la *simetría central* respecto a C , que refleja cada punto de A respecto al centro C .

Para estudiar los puntos fijos de una homotecia resolvemos el sistema (2.1),

$$\left(M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}_c}(\eta) - I_{n+1}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline (1-\lambda)\mathbf{a}^t & (\lambda-1)I_n \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

que equivale a

$$(1-\lambda)\mathbf{a}^t = (1-\lambda)\mathbf{x}^t \quad \text{si y solo si} \quad \mathbf{a}^t = \mathbf{x}^t$$

y el único punto fijo es el centro C de coordenadas \mathbf{a} .

Por otra parte, los subespacios afines invariantes son aquellos que contienen al centro C . En efecto, supongamos que $B = P + W \subset A$ es invariante. Cualquier subespacio vectorial $W \subset V$ es invariante para $\vec{\eta} = \lambda \text{Id}_V$, por lo que la única condición será que $\overrightarrow{P\eta(P)} \in W$. Pero si se tiene que

$$\overrightarrow{P\eta(P)} = \overrightarrow{P(C + \lambda\vec{CP})} = (1-\lambda)\overrightarrow{PC} \in W$$

entonces necesariamente $\overrightarrow{PC} \in W$ y, por tanto, $C \in B$. Que la pertenencia de C a B es suficiente para que B sea invariante es un ejercicio sencillo.

Las homotecias conservan la propiedad de paralelismo entre subespacios afines, ya que la aplicación lineal asociada es una homotecia vectorial donde todos los vectores son propios (de valor propio λ). En efecto, si $B = P + W$ es un subespacio afín, su imagen por una homotecia es

$$\eta(B) = \eta(P) + \vec{\eta}(W) = \eta(P) + \lambda \text{Id}_V(W) = \eta(P) + W$$

que es un subespacio paralelo a B , de la misma dimensión.

Observación 2.2.4. Las traslaciones y homotecias forman un subgrupo del grupo de aplicaciones afines $GA(n, \mathbb{K})$. En efecto, por la Proposición 2.1.6 1., las aplicaciones lineales asociadas resultantes de componer traslaciones con traslaciones son traslaciones (de vector la suma de vectores), de componer traslaciones con homotecias son homotecias (de centro trasladado), y de componer homotecias con homotecias son homotecias (de razón el producto de las razones).

Si componemos una homotecia η_1 de centro C_1 y razón λ_1 con otra homotecia η_2 de centro C_2 y razón λ_2 , con $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 1$, la aplicación afín $\eta_2 \circ \eta_1$ es una homotecia de centro

$$C_1 + \frac{1-\lambda_2}{1-\lambda_1\lambda_2} \overrightarrow{C_1C_2}$$

y razón $\lambda_1 \cdot \lambda_2$. En el caso de que $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, la composición $\eta_2 \circ \eta_1$ es una traslación de vector $(\lambda_1 - 1)\overrightarrow{C_1C_2}$.

Obsérvese que la composición de una traslación con una homotecia no conmuta, por tanto este subgrupo no es abeliano.

Ejemplo 2.2.5. Consideremos en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ la homotecia $\eta : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ de centro $C = (4, 3)$ y razón $\lambda = 2$. Como vemos en la Figura 2.2.5, la imagen por η del punto $P = (4, 4)$ es

$$\eta(P) := C + \lambda \cdot \overrightarrow{CP} = (4, 5).$$

Los subespacios invariantes por η son aquellos que contienen al centro, como por ejemplo la recta $B := \{3x - 4y = 0\}$.

Respecto de la referencia cartesiana estándar, la matriz de η viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_{c,e}\mathcal{R}_{c,e}}(\eta) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

La homotecia conserva direcciones, por lo que la imagen de la recta $L : \{x + y = 5\}$ es otra recta paralela $\eta(L) : \{x + y = 3\}$, ambas con dirección $\mathcal{L}[(1, -1)]$.

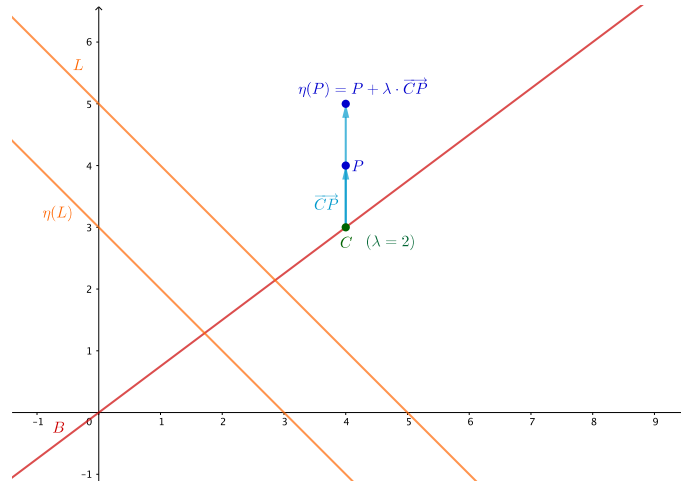


Figura 2.2: Homotecia en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ de centro $C = (4, 3)$ y razón $\lambda = 2$. La recta $B : \{3x - 4y = 0\}$ es un subespacio invariante porque contiene al centro de la homotecia. La imagen de la recta $L : \{x + y = 5\}$ es otra recta paralela $\eta(L) : \{x + y = 3\}$.

Ejemplo 2.2.6. En la recta afín real $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$, la matriz (respecto de la referencia canónica estándar) de una afinidad es de la forma

$$M_{\mathcal{R}_{c,e}\mathcal{R}_{c,e}}(\eta) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ b & \lambda \end{array} \right).$$

con $\lambda \neq 0$. Si $\lambda = 1$ se trata de una traslación de vector $b \in \mathbb{R}$ (en el caso particular $b = 0$ se trata de la identidad). Si $\lambda \neq 1$ se trata de una homotecia de centro $c \in \mathbb{R}$ con $(1 - \lambda) \cdot c = b$, luego $c = \frac{b}{(1-\lambda)}$. Por tanto, las afinidades de la recta son siempre traslaciones u homotecias.

2.2.3. Proyecciones

Sean $B \subset A$ un subespacio afín con dirección $W \subset V$, y sea U una dirección complementaria en V , es decir, tal que $W \oplus U = V$. Definimos la *proyección* sobre B paralela a U como la aplicación

$$\begin{aligned} \pi: A &\longrightarrow A \\ P &\longmapsto B \cap (P + U) \end{aligned}$$

Esta aplicación está bien definida ya que $B \cap (P + U)$ es un único punto. Si $B \cap (P + U) = \emptyset$, como W y U son complementarias verifican que $W \cap U = \{\mathbf{0}\}$, por lo que aplicando la fórmula de Grassmann tenemos

$$\dim B + \dim(P + U) = \dim B + \dim(P + U) - \dim(W \cap U) + 1 = \dim W + \dim U + 1 = \dim A + 1$$

y la dimensión de la suma de subespacios excedería la del espacio ambiente, lo que es imposible. Por tanto $B \cap (P + U) \neq \emptyset$ y, entonces, es una subvariedad afín con dirección la intersección de sus direcciones $W \cap U = \{\mathbf{0}\}$, luego tiene dimensión cero y, por consiguiente, es un punto $Q := \pi(P) = B \cap (P + U)$.

La proyección es una aplicación afín. En efecto, sean $P \in B$ y $Q \in A$. Como $P \in B \cap (P + U)$ se tiene que P es fijo por π , es decir, $\pi(P) = P$, y

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P\pi(Q)} + \overrightarrow{\pi(Q)Q},$$

donde el primer vector de la suma pertenece a W (ya que P y $\pi(Q)$ pertenecen a $P + W$) y el segundo pertenece a U (ya que tanto $\pi(Q)$ como Q pertenecen a $Q + U$). Como $W \oplus U = V$ la anterior descomposición es la descomposición en suma directa del vector \overrightarrow{PQ} y su imagen es

$$\overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\pi(P)\pi(Q)} = \overrightarrow{P\pi(Q)}.$$

Por tanto, π es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada $\overrightarrow{\pi}$ es la proyección lineal sobre W con dirección U que a cada vector $\vec{v} \in V$ tal que $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$ únicos con $\vec{w} \in W$, $\vec{u} \in U$, le asigna

$$\overrightarrow{\pi}(\vec{v}) = \vec{w}.$$

Dada una referencia cartesiana

$$\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_d, u_1, \dots, u_{n-d}\}\},$$

donde $O \in B$, $\{w_1, \dots, w_d\}$ es una base de W y $\{u_1, \dots, u_{n-d}\}$ es una base de U , la matriz de π respecto de \mathcal{R}_c viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\pi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & 0 \\ \hline & I_d & 0 \\ 0 & & 0 \end{array} \right)$$

Véase que una proyección no es una afinidad (su matriz no es invertible). Sin embargo, una propiedad de las proyecciones es que son *idempotentes* ya que $\pi \circ \pi = \pi$. Se puede demostrar el recíproco, al igual que en el caso vectorial, es decir, que una aplicación afín idempotente es necesariamente una proyección.

Los puntos fijos de una proyección son las soluciones del sistema (2.1)

$$\left(M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\pi) - I_{n+1} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & & 0 \\ \hline & 0 & 0 \\ 0 & & -I_{n-d} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

que equivale a

$$x_{d+1} = \dots = x_n = 0$$

o, lo que es lo mismo, P es punto fijo si y solo si $\overrightarrow{OP} \in W$, lo que equivale a $P \in B$. Por consiguiente, los puntos fijos de una proyección sobre B son todos los puntos del subespacio afín B .

Usando la Proposición 2.1.15, los subespacios invariantes $C \subset A$ verifican que su dirección $Y \subset V$ es invariante para $\overrightarrow{\pi}$. Los subespacios $Y \subset V$ que verifican esta condición son aquellos que se pueden escribir como $Y = Y_W \oplus Y_U$, donde $Y_W \subset W$, $Y_U \subset U$. Como la imagen de un subespacio C está contenida en B , si C es invariante necesariamente $C \subset B \neq \emptyset$. Entonces podemos suponer que $B = P + W$ y $C = P + Y$, $P \in C \cap B$, y la otra condición para que C sea invariante, $\overrightarrow{P\pi(P)} = \overrightarrow{P\dot{P}} \in Y$, se verifica trivialmente. Por tanto los subespacios invariantes son de la forma $C = P + (Y_W \oplus Y_U)$, con $P \in B$, $Y_W \subset W$ e $Y_U \subset U$. Esto incluye subespacios $C \subset B$ (subespacios de puntos fijos, cuando $Y_U = \{\mathbf{0}\}$), y subespacios de dirección paralela a U por un punto de B (cuando $Y_U = U$, entonces $U \subset Y$, o cuando $Y_W = \{\mathbf{0}\}$, entonces $Y \subset U$), aunque existen más casos (cuando una base de Y combina vectores de W y U).

Ejemplo 2.2.7. Consideremos en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ la proyección $\pi : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ con base $B = \{-x + 2y = 2\}$ y dirección $U = \mathcal{L}\{(1, 2)\} : \{-2x + y = 0\}$. Como se aprecia en la Figura 2.2.7, la imagen por π del punto $P = (3, 4)$ es la intersección de $C = P + U$ con B , el punto $\pi(P) = (2, 2)$. La recta C es invariante por π ya que corta a B y lleva la misma dirección que la de la proyección U . En este ejemplo los únicos subespacios invariantes son todas las rectas paralelas a C (todas con la misma dirección U y que proyectan en el punto intersección con B) además de B (o cualquier punto contenido en B , obviamente).

Como el punto $(0, 1) \in B$, la dirección de B es $W = \mathcal{L}\{(2, 1)\}$ y $U = \mathcal{L}\{(1, 2)\}$, respecto de la referencia cartesiana

$$\mathcal{R}_c = \{(0, 1); (2, 1), (1, 2)\}$$

la matriz de π viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

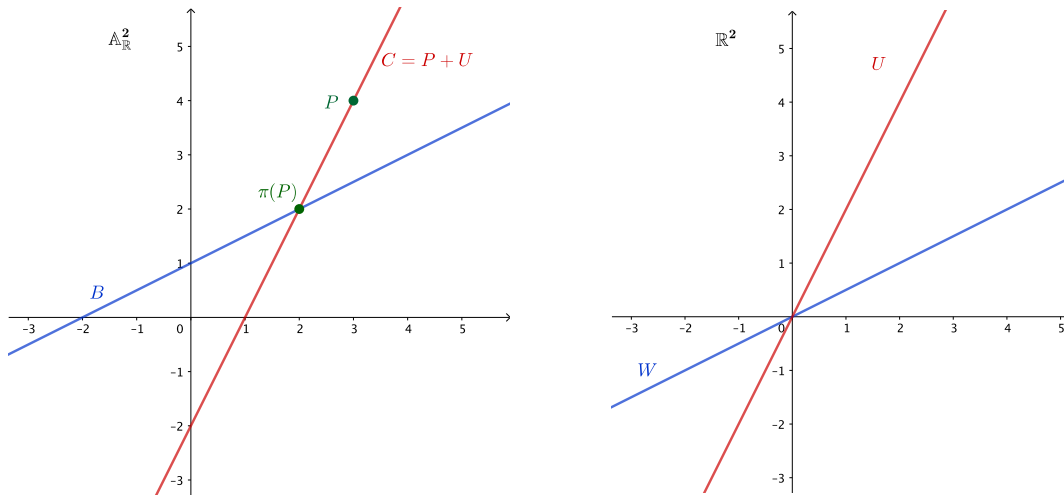


Figura 2.3: Izquierda, proyección en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ con base $B : \{-x + 2y = 2\}$ y dirección $U = L\{(1, 2)\} : \{-2x + y = 0\}$. La recta $C : \{-2x + y = -2\}$ es invariante así como cualquier recta paralela a ella. Derecha, subespacios vectoriales $W \oplus U = \mathbb{R}^2$.

2.2.4. Simetrías

Una vez hemos definido la proyección π respecto de $B \subset A$ paralela a U , podemos definir una simetría con los mismos elementos. Recordamos que la dirección de B es un subespacio vectorial $W \subset V$ tal que $W \oplus U = V$. Definimos la *simetría* sobre B paralela a U , denotada por σ como

$$\sigma : A \longrightarrow A \\ P \longmapsto \pi(P) + \overrightarrow{P\pi(P)},$$

que está bien definida por estarlo la proyección π .

La simetría también es una aplicación afín porque, dado un punto $P \in B$ y otro punto $Q \in A$, tenemos la descomposición

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P\pi(Q)} + \overrightarrow{\pi(Q)Q}$$

como veíamos en la proyección, en vectores de W y U con $W \oplus U = V$. Como el punto $P \in B$ es fijo por la simetría tenemos

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(\overrightarrow{PQ}) &= \overrightarrow{\sigma(P)\sigma(Q)} = \overrightarrow{P\sigma(Q)} = \\ & \overrightarrow{P(\pi(Q) + Q\pi(Q))} = \overrightarrow{P\pi(Q)} + \overrightarrow{Q\pi(Q)} = \overrightarrow{P\pi(Q)} - \overrightarrow{\pi(Q)Q}. \end{aligned}$$

Por lo que σ es aplicación afín con con aplicación lineal asociada $\vec{\sigma}$, la simetría lineal respecto de W con dirección U , que a cada vector $\vec{v} \in V$ tal que $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$ únicos con $\vec{w} \in W$, $\vec{u} \in U$, le asigna

$$\vec{\sigma}(\vec{v}) = \vec{w} - \vec{u}.$$

Nótese además que $\sigma = 2\pi - \text{Id}_A$ y que $\vec{\sigma} = 2\vec{\pi} - \text{Id}_V$.

En la referencia cartesiana de la proyección

$$\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_d, u_1, \dots, u_{n-d}\}\},$$

donde $O \in B$, $\{w_1, \dots, w_d\}$ son base de W y $\{u_1, \dots, u_{n-d}\}$ son base de U , la matriz de σ respecto de \mathcal{R}_c viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}_c}(\sigma) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & 0 \\ \hline & I_d & 0 \\ 0 & 0 & -I_{n-d} \end{array} \right)$$

que es una matriz invertible con inversa ella misma. Por tanto las simetrías son afinidades cuya inversa es ella misma, $\sigma \circ \sigma = \text{Id}_A$, es decir, son *involuciones*. Como en el caso de las proyecciones se puede demostrar que, recíprocamente, cualquier involución afín es una simetría.

Con ayuda de la ecuación (2.1) obtenemos los puntos fijos de una simetría

$$\left(M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}_c}(\pi) - I_{n+1} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & & 0 \\ \hline & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \cdot I_{n-d} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

que equivale, como en la proyección, a

$$x_{d+1} = \dots = x_n = 0,$$

luego los puntos fijos de una simetría sobre B son también todos los puntos del subespacio afín B .

Para el cálculo de los subespacios invariantes se usa un tratamiento similar a las proyecciones. Dado un subespacio invariante $C \in B$ su dirección Y debe poderse escribir como $Y = Y_W \oplus Y_U$, donde $Y_W \subset W$, $Y_U \subset U$. La otra condición es que $\overrightarrow{Q\sigma(Q)} \in Y$, para todo $Q \in C$. Pero esta condición equivale a

$$\overrightarrow{Q\sigma(Q)} = \overrightarrow{Q(\pi(Q) + Q\pi(Q))} = 2 \cdot \overrightarrow{Q\pi(Q)} \in Y,$$

que es la misma condición que para las proyecciones. Por tanto, los subespacios invariantes para una simetría respecto de B con dirección U son los mismos que los de una proyección sobre el mismo subespacio con la misma dirección, es decir, $C = P + (Y_W \oplus Y_U)$, con $P \in B$, $Y_W \subset W$ e $Y_U \subset U$.

Finalmente diremos que, dependiendo de la dimensión de B , una simetría es *central* si B es un punto, *axial* si B es una recta, o *especular* si B es un plano. Observa que una simetría central respecto a un punto B coincide una homotecia de centro B y razón $\lambda = -1$.

Ejemplo 2.2.8. Continuando con el Ejemplo 2.2.7, consideremos ahora la simetría $\sigma : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ respecto de $B : \{-x + 2y = 2\}$ con dirección $U = L[(1, 2)] : \{-2x + y = 0\}$. En la Figura 2.2.8 podemos ver que la imagen del punto $P = (3, 4)$ es la suma del punto P con el doble del vector $\overrightarrow{P\pi(P)}$, tal que $\sigma(P) = (1, 0)$. Se observa como $\sigma(P)$ es, efectivamente, el simétrico de P respecto de B , siguiendo la dirección U . La recta C también es invariante por σ como lo era por la proyección π , y cualquier otra recta paralela a C también lo es.

Tomando la misma referencia cartesiana con origen el punto $(0, 1) \in B$, y vectores $(2, 1) \in W$ $(1, 2) \in U$,

$$\mathcal{R}_c = \{(0, 1); (2, 1), (1, 2)\}$$

la matriz de σ viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_c, e\mathcal{R}_c}(\pi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Ejemplo 2.2.9. Sea $B \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ el plano de ecuación $B : \{x - y + z = 3\}$ y sea el subespacio vectorial $U = L[(0, 1, 0)]$. Sea π la proyección sobre B con dirección U . La dirección de B es $W := \{x - y + z = 0\} = L[(1, 1, 0), (0, 1, 1)]$ (véase que $W \oplus U = \mathbb{R}^3$), y un punto de B es $P = (3, 0, 0)$. Por tanto, respecto de la referencia

$$\mathcal{R}_c = \{(3, 0, 0); \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0)\}\}$$

la matriz de la proyección viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_c, e\mathcal{R}_c}(\pi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Si queremos construir la simetría respecto del mismo plano B con dirección U , respecto de la misma referencia \mathcal{R}_c , su matriz viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_c, e\mathcal{R}_c}(\pi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

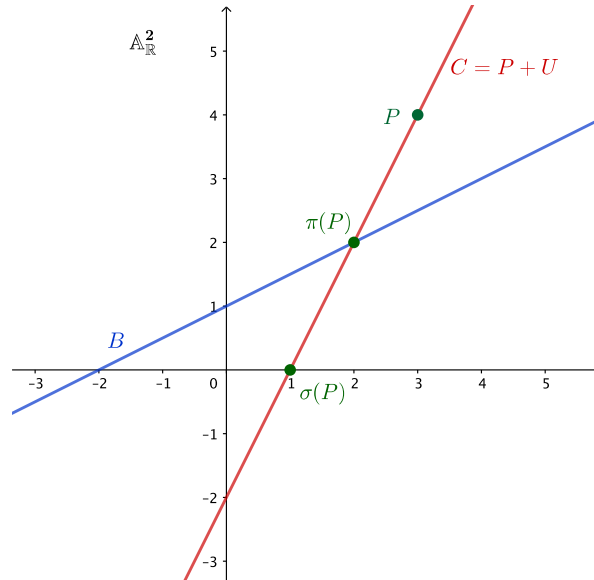
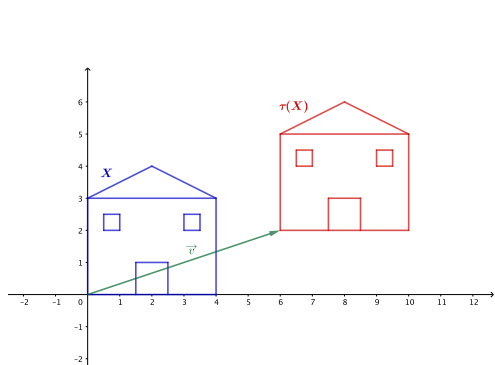


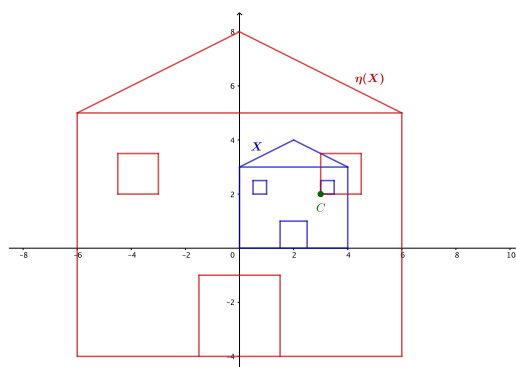
Figura 2.4: Simetría en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ respecto de $B : \{-x + 2y = 2\}$ y dirección $U = L[(1, 2)] = \{-2x + y = 0\}$. La recta $C : \{-2x + y = -2\}$ es invariante así como cualquier recta paralela a ella.

Aplicación afín	f	Elementos	\vec{f}
Traslación	τ	Vector $\vec{v} \neq \mathbf{0}$	$\vec{\tau} = \text{Id}_V$
Homotecia	η	Centro C y razón $\lambda \neq 0, 1$	$\vec{\eta} = \lambda \cdot \text{Id}_V$
Proyección	π	Base $B = P + W$ y dirección U con $W \oplus U = V$	$\vec{\pi} _W = \text{Id}_W$ $\vec{\pi} _U = \mathbf{0}$
Simetría	σ		$\vec{\sigma} _W = \text{Id}_W$ $\vec{\sigma} _U = -\text{Id}_U$
Aplicación afín	Inversa	Puntos fijos	Subespacios invariantes
Traslación	$(\tau_{\vec{v}})^{-1} = \tau_{-\vec{v}}$	\emptyset	B con dirección W y $\vec{v} \in W$
Homotecia	$(\eta_{C,\lambda})^{-1} = \eta_{C,\lambda^{-1}}$	C	B con $C \in B$
Proyección	No tiene	B	$C = P + (Y_W \oplus Y_U)$ con $P \in B$ y $Y_W \subset W, Y_U \subset U$
Simetría	$\sigma^{-1} = \sigma$		

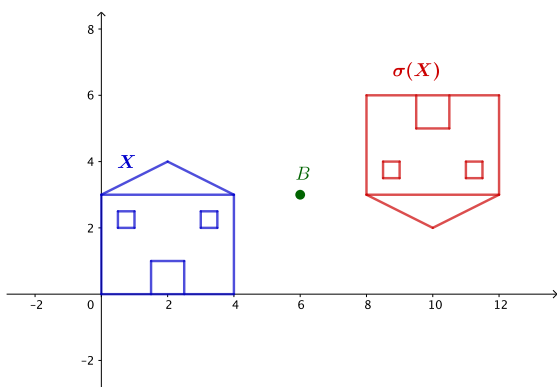
Cuadro 2.1: Resumen de propiedades de algunas aplicaciones afines distinguidas.



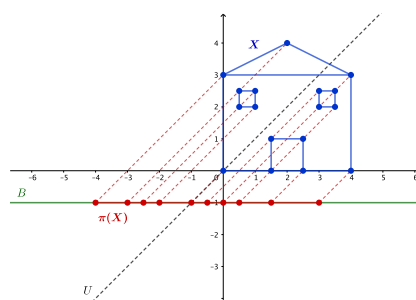
(a) Traslación de vector \vec{v} .



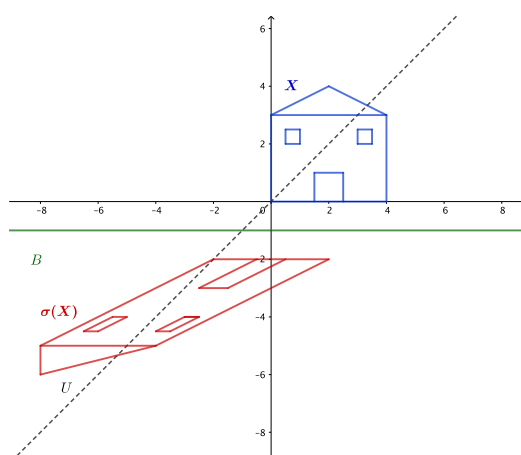
(b) Homotecia de centro C y razón $\lambda = 3$.



(c) Simetría central respecto de B .



(d) Proyección sobre B con dirección U .



(e) Simetría respecto de B con dirección U .

Figura 2.5: Transformaciones afines de una misma figura.

2.3. Razón simple

Finalizamos este capítulo con la exposición del concepto de razón simple de tres puntos alineados. Esta noción será el invariante que caracterizará las afinidades.

Definición 2.3.1. Dados puntos $P, Q, R \in A$ alineados, con $P \neq Q$, la *razón simple* de P, Q y R , denotada por $[P, Q, R] := \lambda$ es el único escalar λ tal que $\overrightarrow{PR} = \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$.

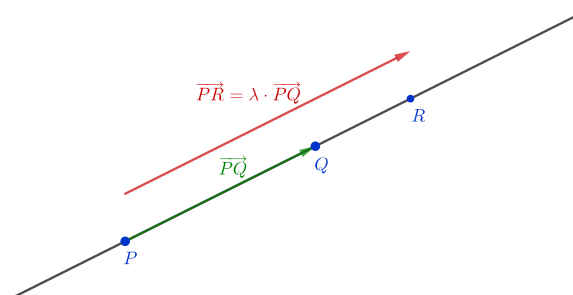


Figura 2.6: Razón simple $\lambda = [P, Q, R]$ de tres puntos alineados.

En la Figura 2.3 podemos observar cómo el valor de la razón simple varía dependiendo de la posición relativa de R respecto a los puntos P y Q . En particular, la razón simple es $\lambda = \frac{1}{2}$ cuando R es el punto medio del segmento que une P y Q .

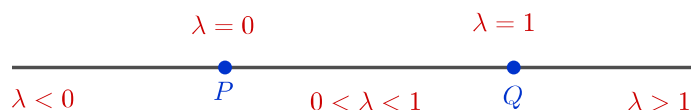


Figura 2.7: Razón simple $\lambda = [P, Q, R]$ dependiendo de la posición relativa de R respecto a P y Q .

Lemma 2.3.2. *Dados P, Q, R pertenecientes a una recta L , $P \neq Q$, existe un único isomorfismo afín $f : L \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$ que lleva $f(P) = 0$, $f(Q) = 1$ y $f(R) = \lambda = [P, Q, R]$.*

Demostración. Como $P \neq Q$, $\mathcal{R}_a = \{P, Q\}$ es una referencia afín de la recta L . Como $\mathcal{R}_{a,e} = \{0, 1\}$ también es una referencia afín de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$, por el Teorema 2.1.10, existe un único isomorfismo afín f tal que $f(P) = 0$ y $f(Q) = 1$. Ahora,

$$f(R) = f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PR}) = 0 + \overrightarrow{f}(\lambda \overrightarrow{PQ}) = 0 + \lambda \overrightarrow{f(P)f(Q)} = 0 + \lambda \overrightarrow{01} = \lambda.$$

□

Como muestra la siguiente proposición, las afinidades preservan la razón simple.

Proposición 2.3.3. *Sea $f : A \rightarrow A$ una aplicación afín tal que su restricción $f|_L : L \rightarrow L'$ a una recta L es un isomorfismo afín. Sean $P, Q, R \in L$, $f(P), f(Q), f(R) \in L'$, y supongamos que f respeta el orden de los puntos. Entonces, se conserva la razón simple*

$$[P, Q, R] = [f(P), f(Q), f(R)].$$

Demostración. Por el Lema 2.3.2, existen isomorfismos afines $g : L \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$, $h : L \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$ que llevan $g(P) = 0$, $g(Q) = 1$, $g(R) = \lambda = [P, Q, R]$, y $h(f(P)) = 0$, $h(f(Q)) = 1$, $h(f(R)) = \lambda' = [f(P), f(Q), f(R)]$. Como la composición $h \circ f$ lleva P a $0 \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$ y Q a $1 \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$ y $\{P, Q\}$ son referencia afín de L , $h \circ f$ está completamente determinada por la imagen de estos dos puntos y, por tanto, $h \circ f = g$. Entonces se tiene que

$$[P, Q, R] = \lambda = g(R) = (h \circ f)(R) = h(f(R)) = \lambda' = [f(P), f(Q), f(R)].$$

□

Observación 2.3.4. El hecho de que las afinidades conserven la razón simple es consecuencia directa de la linealidad de la aplicación asociada. La razón simple de $P, Q, R \in L \subset A$ es, si $P \neq Q$, el único λ tal que $\overrightarrow{PQ} = \lambda \cdot \overrightarrow{PR}$. En términos de una referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$,

$$\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \lambda \cdot (\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP})$$

Ahora sea f una aplicación afín. Usando la linealidad de su aplicación asociada \overrightarrow{f} ,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(P)f(Q)} &= \overrightarrow{f(O)f(Q)} - \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f}(\lambda \cdot (\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP})) = \\ &= \lambda \cdot \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}) = \lambda \cdot (\overrightarrow{f(O)f(R)} - \overrightarrow{f(O)f(P)}) = \lambda \cdot \overrightarrow{f(P)f(R)} \end{aligned}$$

por lo que

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \lambda \cdot \overrightarrow{f(P)f(R)}$$

y λ es la razón simple de P, Q y R .

Por tanto, la misma linealidad con la que la aplicación lineal \overrightarrow{f} (si es isomorfismo) lleva vectores proporcionales en vectores proporcionales hace que la aplicación afín f lleve puntos alineados en puntos alineados con la misma razón simple.

El recíproco de esta proposición, junto con la propiedad de llevar rectas en rectas, caracteriza las afinidades. Lo enunciamos, sin demostración, en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.5 (Teorema fundamental de la geometría afín). *Una aplicación afín $f : A \rightarrow A$ es una afinidad si y solo si es biyectiva, lleva rectas en rectas y preserva la razón simple.*

Demostración. Puede consultarse en [FernandoGamboa, Teorema V.1.4] o [Xambo, Teorema 1.41]. \square

De hecho, algo más fuerte puede probarse en el caso real $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ya que para que f sea afinidad basta la condición de que f transforme rectas en rectas. A posteriori, por supuesto, ocurre que se conserva la razón simple. Una prueba de esto puede consultarse en [Xambo, Teorema 1.42 y Corolario 1.43].

2.4. Problemas

Problema 2.4.1. Dada $f : A \rightarrow A'$ aplicación afín, $P \in A$, y $\vec{f} : V \rightarrow V'$, $\overrightarrow{PQ} \mapsto \overrightarrow{f(P)f(Q)}$ su aplicación lineal asociada, demuestra que para todo $Q, R \in A$ se verifica que $\overrightarrow{f(Q)f(R)} = \overrightarrow{f(Q)f(R)}$.

Problema 2.4.2. Probar que una aplicación afín transforma subespacios afines paralelos en subespacios afines paralelos.

Problema 2.4.3. Probar que una aplicación afín transforma (tres) puntos alineados en (tres) puntos alineados.

Problema 2.4.4. Demuestra que la inversa de la aplicación lineal asociada a una afinidad $f : A \rightarrow A$ es la aplicación lineal asociada a la afinidad inversa $f^{-1} : A \rightarrow A$, es decir

$$\vec{f}^{-1} = \overrightarrow{f^{-1}}.$$

Problema 2.4.5. Estudia si las siguientes aplicaciones son afines o no. En caso afirmativo, encuentra su aplicación lineal asociada y estudia si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

- $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - 1, x_2 + x_3 - 2, x_1 - x_3 + 1)$.
- $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2, x_1x_3 + 1)$.
- $f : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, $f(z_1, z_2) = (z_1 - iz_2 + 1, (1 + i)z_1 + z_2 + i)$.
- $f : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, $f(z_1, z_2) = (z_1 + 2i, z_2^2)$.
- $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$, $f(M) = \text{tr}(M)$.
- $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$, $f(M) = \det(M)$.
- $f : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$, $f(p(X)) = p(1)$.
- $f : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $f(p(X)) = p'(X)$.

Problema 2.4.6. Sean $P_0 = (0, 1)$, $P_1 = (0, 3)$, $P_2 = (4, 2)$ los vértices de un triángulo en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$. Define la aplicación afín que lleva ese triángulo en el triángulo de vértices $Q_0 = (-1, -2)$, $Q_1 = (-3, 4)$, $Q_2 = (1, 5)$. Calcula su representación matricial en la referencia cartesiana canónica y en la referencia afín estándar de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.

Problema 2.4.7. Sea la afinidad en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ que transforma el origen de coordenadas en el punto $(2, 4)$ y cuya aplicación lineal asociada transforma los vectores de la base canónica en $(-1, 1)$ y $(1, 1)$ respectivamente.

- Calcula su matriz respecto de la referencia cartesiana canónica.
- Calcula la imagen del cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$.
- Calcula la matriz de su aplicación afín inversa respecto de la referencia cartesiana canónica.

Problema 2.4.8. En el plano afín, dado el cuadrado de vértices $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (1, 1)$ y $P_3 = (0, 1)$, demuestra que no existe ninguna afinidad f que lo transforme en el romboide de vértices $Q_0 = (2, 0)$, $Q_1 = (6, 0)$, $Q_2 = (3, 2)$, $Q_3 = (7, 2)$, preservando el orden de los vértices, es decir, $f(P_i) = Q_i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Problema 2.4.9. Dados dos triángulos, ¿cuántas afinidades de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ transforman uno en otro? ¿y en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$?

Problema 2.4.10. Dadas aplicaciones afines $f : A \rightarrow A'$ y $g : A' \rightarrow A''$, y referencias cartesianas \mathcal{R}'_c , \mathcal{R}_c y \mathcal{R}''_c , demuestra que

$$M_{\mathcal{R}_c, \mathcal{R}''_c}(g \circ f) = M_{\mathcal{R}'_c, \mathcal{R}''_c}(g) \cdot M_{\mathcal{R}_c, \mathcal{R}'_c}(f)$$

.

Problema 2.4.11. Dada la aplicación afín

$$f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3 + 1, x_2 - x_3 - 2, x_1 + x_3 - 1)$$

- Calcula su representación matricial respecto de la referencia cartesiana canónica de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$.
- Calcula el núcleo e imagen de su aplicación lineal asociada.
- Calcula la imagen de la recta que pasa por los puntos $(0, 1, 0)$ y $(1, 2, -1)$.
- Calcula la imagen del plano $\{x_3 = 0\}$.

Problema 2.4.12. Encuentra los puntos fijos y los subespacios invariantes de la aplicación afín

$$f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 + 1, -x_1 + x_2 + 2).$$

Problema 2.4.13. Encuentra los puntos fijos y las rectas invariantes de la aplicación afín

$$f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3 + 1, x_2 - x_3 - 2, x_1 + x_3 - 1).$$

Problema 2.4.14. Dada la aplicación afín

$$f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3 - 1, x_1 - x_3 + 1)$$

- Calcula su representación matricial respecto de las referencias cartesianas canónicas de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ y $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.
- Calcula el núcleo e imagen de su aplicación lineal asociada.
- Encuentra una recta de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ cuya imagen sea un punto.
- Decide si existe algún plano de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ cuya imagen sea un punto y, en caso afirmativo, muestra uno.

Problema 2.4.15. Comprueba que la inversa de una homotecia de centro C y razón λ es la homotecia de centro C y razón λ^{-1} viendo que el producto de sus matrices, con respecto a una referencia cartesiana \mathcal{R}_c , es la identidad.

Problema 2.4.16. Prueba que si el centro C de una homotecia η pertenece a un subespacio afín $B \subset A$, entonces B es invariante por η .

Problema 2.4.17. Muestra que la composición $\eta_2 \circ \eta_1$ de una homotecia η_1 de centro C_1 y razón λ_1 con otra homotecia η_2 de centro C_2 y razón λ_2 es una homotecia de centro

$$C_1 + \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1 \lambda_2} \overrightarrow{C_1 C_2}$$

y razón $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ salvo cuando $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, y que en tal caso se trata de una traslación de vector $(\lambda_1 - 1) \overrightarrow{C_1 C_2}$.

Problema 2.4.18. Muestra que el subgrupo de las traslaciones y las homotecias no es abeliano con un ejemplo de traslación y homotecia cuya composición no commute.

Problema 2.4.19. Considera en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ el cuadrado C con vértices en los puntos $P_0 := (0, 0)$, $P_1 := (1, 0)$, $P_2 := (0, 1)$ y $P_3 := (1, 1)$ y el triángulo T de vértices P_0, P_1 y P_2 . Sea η la homotecia de centro el baricentro del triángulo y razón $\lambda = 3$.

- Calcula la matriz de η respecto de la referencia cartesiana canónica de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$
- Expresa la matriz de η también respecto a la referencia afín estándar de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.
- Calcula las imágenes de los puntos P_0, P_1, P_2 y P_3 por η y dibuja el triángulo $\eta(T)$ y cuadrado $\eta(C)$ resultantes.

- Repite los anteriores apartados para la simetría central, es decir la homotecia de razón $\lambda = -1$ y el mismo centro.

Problema 2.4.20. Demuestra que las rectas invariantes de una simetría son exactamente las que unen un punto no fijo con su imagen.

Problema 2.4.21. Calcula la proyección y la simetría respecto de la recta $B = P + W$, $P = (1, -1, 1)$ y $W = L[(3, -1, 0)]$, con dirección el plano vectorial de ecuación $U := \{2x - y = 0\}$, dando sus matrices respecto de una referencia cartesiana apropiada. Calcule los subespacios de puntos fijos y todos los subespacios invariantes.

Problema 2.4.22. Demuestra que la razón simple de tres puntos es $[P, Q, R] = -1$ si y solo si P es el punto medio de extremos Q y R .

Problema 2.4.23. Si la razón simple de tres puntos es $[P, Q, R] = \lambda$, estudia los valores de la razón simple de todas las posibles reordenaciones de los puntos.